

**GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA**

Tyd: 2 uur

200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 8 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
 2. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 5. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui.
-

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik en toon alle berekeninge:

(a) $|x^2 - 12| = x$ (6)

(b) $e^x + 12e^{-x} = 8$ (8)

1.2 As $z = a + bi$ en $z^2 = 23 - 6z$, vind dan alle moontlike reële waardes van a en b . (10)

1.3 Los $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 4 = 0$ in \mathbb{C} op indien gegee is dat $f(1-i) = 0$. (8)
[32]

VRAAG 2

Gebruik volledige induksie om te bewys dat:

$$\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2$$

[12]

VRAAG 3

Bepaal $f'(x)$ uit eerste beginsels indien $f(x) = \sqrt{x+3}$.

[8]

VRAAG 4

4.1 Beskou die funksie: $f(x) = \frac{x^2 + bx - 6}{2x - a}$

Bepaal die reële waardes van a en b indien die funksie 'n vertikale asimptoot by $x = 4$ en 'n skuins asimptoot van $y = \frac{1}{2}x + 4$ het. (8)

4.2 Bepaal die reële waardes van a en b indien die funksie $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{2x - 3}$ 'n stasionêre punt by $(1; 2)$ het. (11)

[19]

VRAAG 5

Beskou die funksie f wat soos volg gedefinieer word:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 4 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < -2 \\ 2 & x = -2 \\ 0,5x^2 + 1 & -2 < x < 2 \\ g(x) & x \geq 2 \end{cases}$$

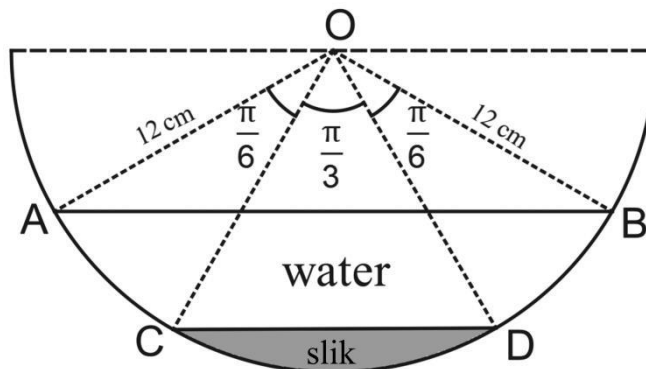
Beantwoord die volgende vrae en gee noukeurig aandag aan die **notasie** wat jy gebruik:

- 5.1 Bepaal $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ indien dit bestaan. Indien nie, verduidelik waarom nie. (4)
 - 5.2 Waarom is f diskontinu by $x = -2$? (5)
 - 5.3 Watter tipe diskontinuiteit kom voor by $x = -2$? (2)
 - 5.4 Bepaal $g(x)$ indien $g(x)$ 'n **lineêre funksie** is en f differensieerbaar moet wees by $x = 2$. (8)
- [19]**

VRAAG 6

Beskou die diagram hieronder. Dit verteenwoordig die deursnee van 'n halfsirkelvormige geut met O die middelpunt van die halfsirkel. Daar is slik onder in die geut. Die oppervlak van die slik, CD, is parallel aan die oppervlak van die water, AB. Belangrike hoeke, in radiale, word in die diagram getoon. Indien die radius van die geut 12 cm is en die geut 2 m lank is, bereken die volume water in die geut tot die naaste liter.

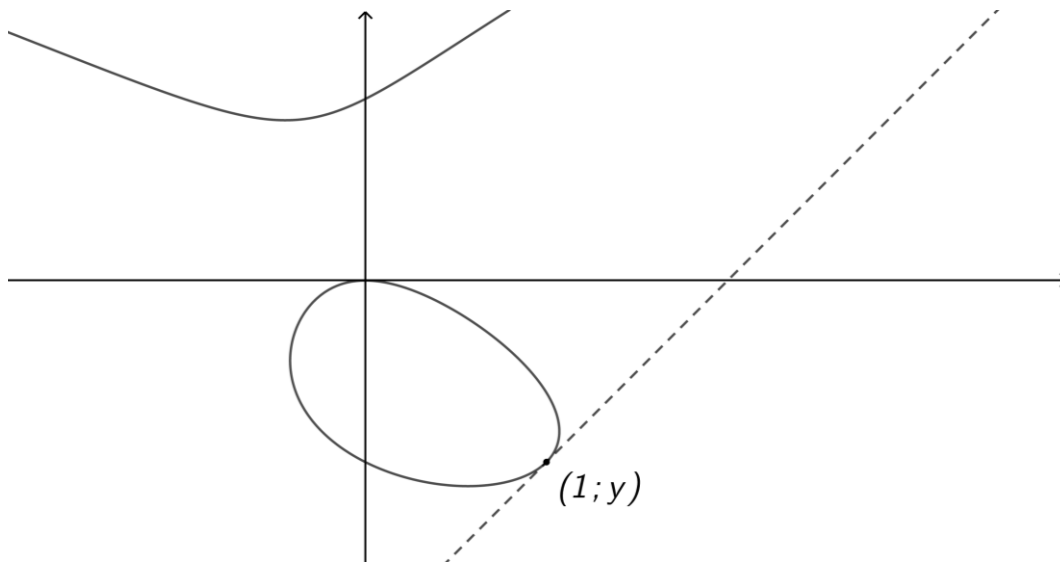
Onthou: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ en $1 \text{ liter} = 1\,000 \text{ ml}$.



[10]

VRAAG 7

Hieronder is die grafiek van die verwantskap: $y^3 - xy = y + x^2$

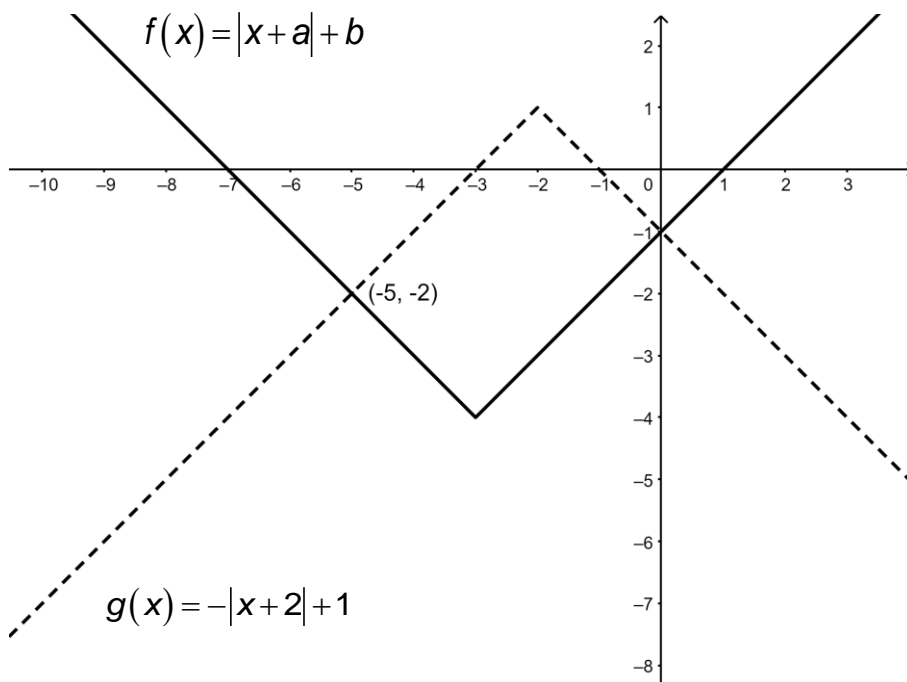


Bepaal die vergelyking van die raaklyn (met 'n stippelyn aangedui) indien dit bekend is dat die x-koördinaat van die raakpunt 1 is.

[10]

VRAAG 8

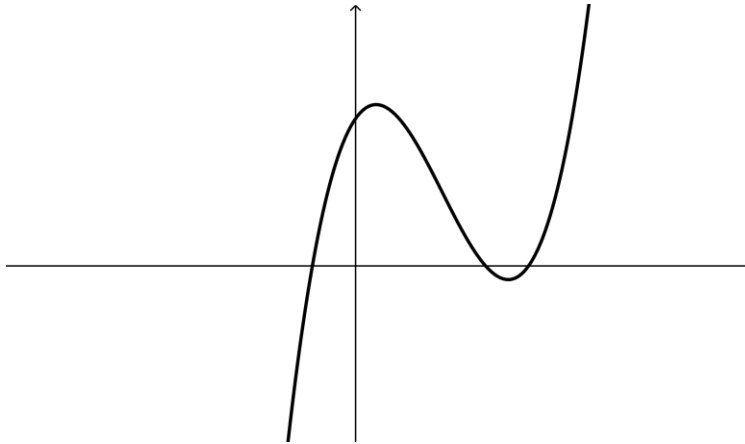
8.1 Beskou die funksies $f(x) = |x+a|+b$ en $g(x) = -|x+2|+1$ wat op 'n geskaleerde assestelsel geteken is.



(a) Bepaal die waardes van a en b . (4)

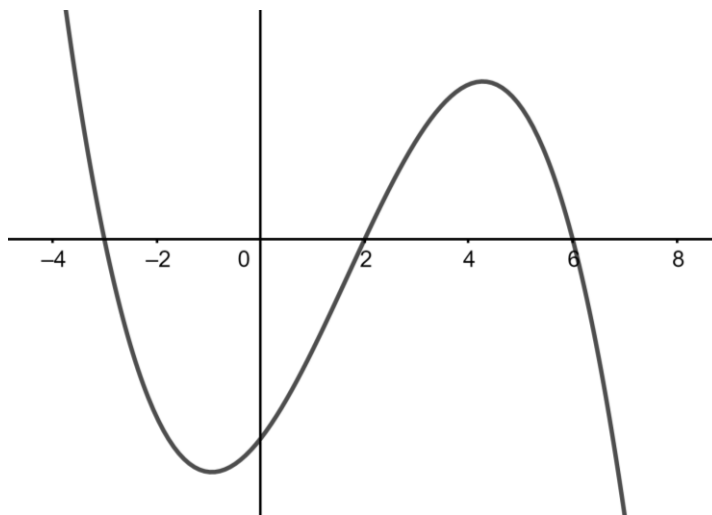
(b) Los vervolgens, of andersins, op vir x in: $|x+3| + |x+2| \leq 5$. (8)

8.2 Die grafiek van $y = f(x)$ word in die diagram hieronder gegee. Teken op jou eie assestelsel in jou Antwoordboek 'n ruwe skets van $y = f(|x|)$.



(4)

8.3 Beskou die funksie f wat hieronder geteken is.



Indien $\int_0^2 f(x) dx = -38,7$ en $\int_2^6 f(x) dx = 74,7$ gegee word, bepaal:

(a) $\int_0^6 f(x) dx$ (2)

(b) $\int_0^6 |f(x)| dx$ (2)

[20]

VRAAG 9

Beskou die funksie $f(x) = x \ln(x) - \sqrt{x^2 + 4}$, $x > 0$.

9.1 Indien gegee word dat f kontinuu is by elke waarde in sy definisiegebied, regverdig waarom f minstens een wortel op die interval $x \in [1; 5]$ het. (4)

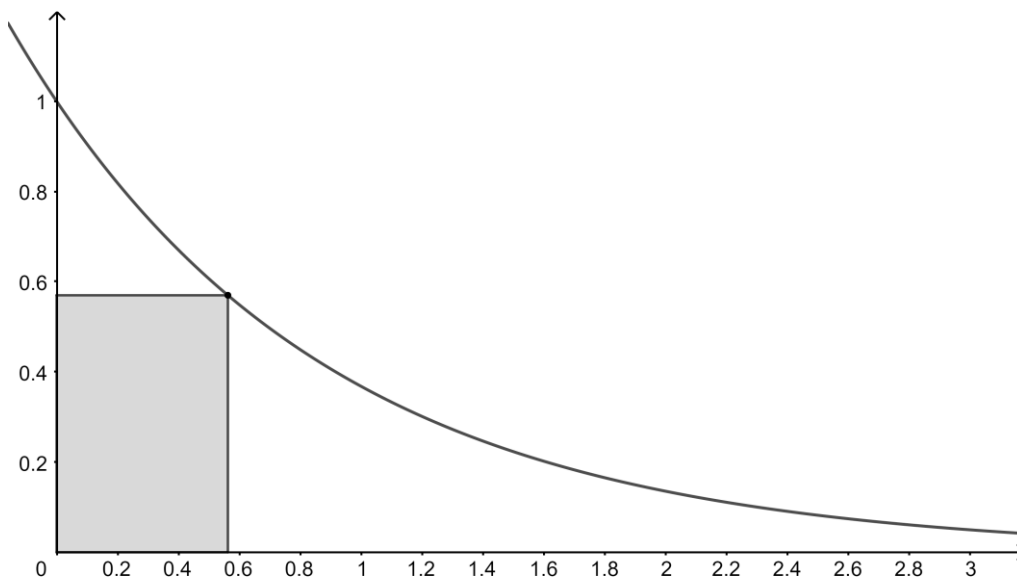
9.2 Gebruik Newton-Raphson-iterasie om hierdie wortel te bepaal. Jy moet die volgende doen:

- gebruik 'n aanvanklike raaiskoot van $x = 1$
- toon die iteratiewe formule wat jy gebruik
- toon jou eerste twee benaderings
- gee jou antwoord tot 5 desimale plekke

(10)
[14]

VRAAG 10

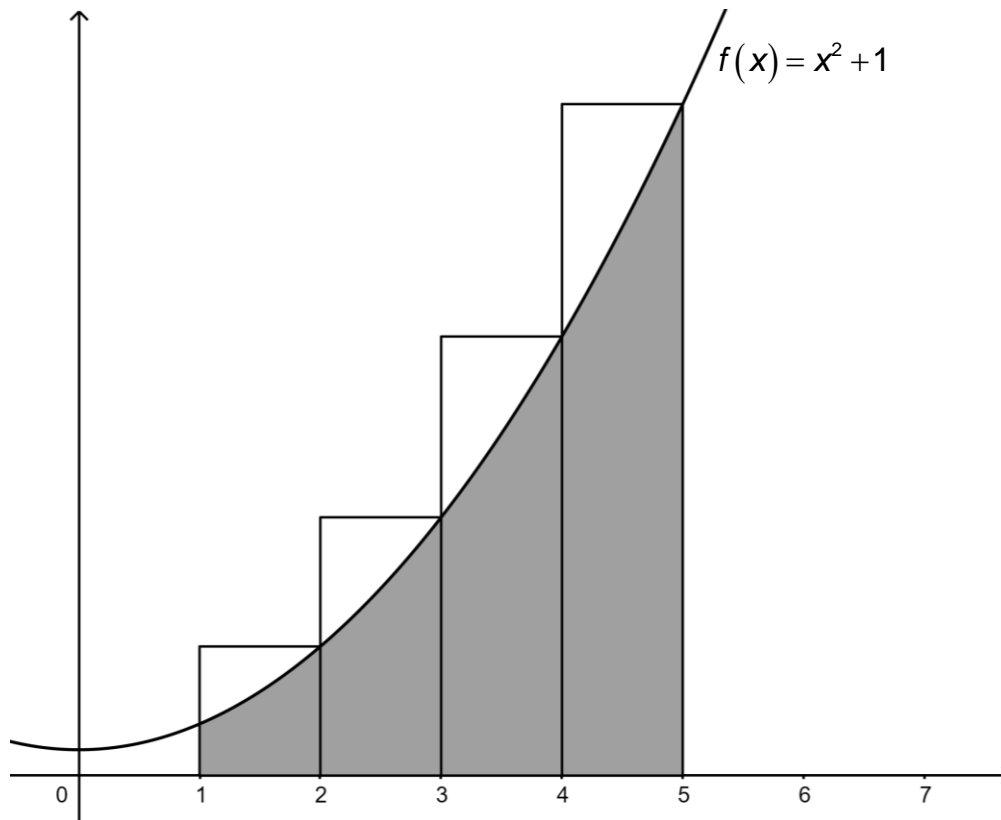
Beskou die diagram hieronder waar 'n reghoek in die eerste kwadrant gevorm word. Die onderste linkerhoek word op die oorsprong geplaas, terwyl die boonste regterhoek op die kromme $y = e^{-x}$ geplaas word. Bereken tot 3 desimale plekke die maksimum oppervlakte van die reghoek wat behaal kan word deur dit op hierdie manier te plaas.



[6]

VRAAG 11

11.1 Robyn gebruik reghoeke om die gearseerde oppervlakte te beraam. Bereken haar foutpersentasie tot een desimale plek.



(6)

11.2 (a) Ontbind $\frac{3x^2 + 11x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4}$ in parsieelbreuke. (10)

(b) Bepaal vervolgens, of andersins, $\int \frac{3x^2 + 11x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$. (6)

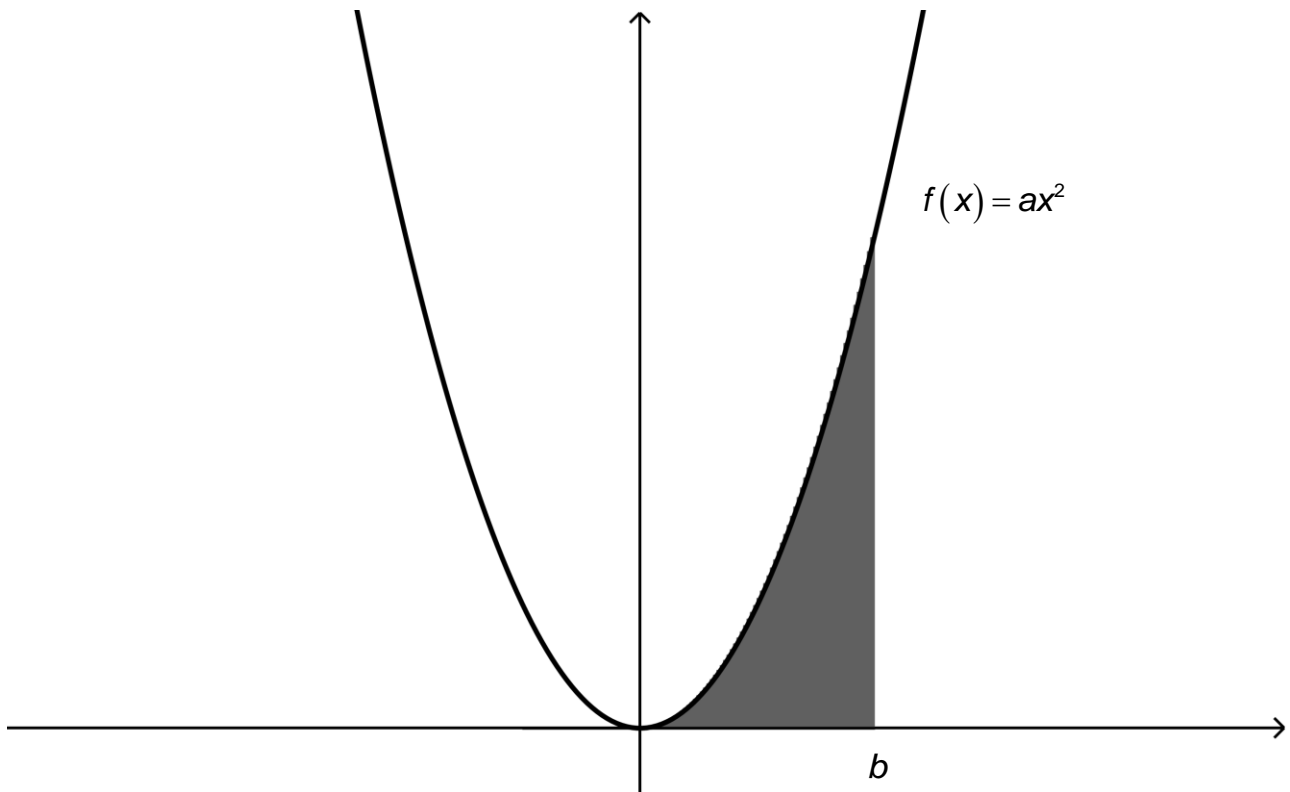
11.3 Bepaal $\int xe^{2x} dx$. (8)

11.4 Bepaal $\int \operatorname{cosec}^2 x \cot^2 x dx$. (6)

[36]

VRAAG 12

Beskou die diagram hieronder.



Die oppervlakte begrens deur die funksie f , die x -as, die lyne $x=0$ en $x=b$ is $\frac{160}{3}$ eenhede².

Wanneer hierdie oppervlakte om die x -as geroteer word, is die resulterende volume $1\,280\pi$ eenhede³.

Bepaal die waardes van a en b .

[14]

Totaal: 200 punte